Лекція № 6

Ще кілька відомостей про **повністю антисиметричний одиничний тензор 4-го рангу** ε^{iklm}, який визначили в лекції № 5. Цей тензор є інваріантним відносно перетворень координат в 4-просторі.

Ненульовими (приймають значення або +1, або – 1) залишаються тільки компоненти, у яких всі чотири індекси різні. Домовимось, що

$$\varepsilon^{0123} = +1. \qquad (1.107)$$

Тоді $\varepsilon_{0123} = -1$. Знак «+» або «–» для інших компонент визначається парністю чи непарністю кількості перестановок. Усього маємо 4!=24 ненульових компонент. При згортанні добутку ε^{iklm} з ε_{nprs} отримаємо

$$\varepsilon^{iklm}\varepsilon_{iklm} = -24. \qquad (1.108)$$

Насправді ε^{iklm} є псевдотензором. При інверсії його компоненти (визначені однаково для всіх систем координат!) не змінюються, а компоненти тензора повинні змінювати знак.

Тензорний добуток $\varepsilon^{iklm}\varepsilon^{nprs}$ є тензором 8-го рангу. Згортання можемо виконати до тензору 6-го, 4-го, 2-го рангу, які є однаковими в усіх системах координат. Це означає, що їх компоненти повинні виражатися через комбінації добутків δ^i_k. Відповідні формули можна знайти, наприклад, на стор. 18 в Landau_Lifshitz_The classical theory of fields

† For reference we give the following formulas:

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix}, \quad e^{iklm}e_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix}$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2(\delta^i_p\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_p), \qquad e^{iklm}e_{prlm} = -6\delta^i_p.$$

The overall coefficient in these formulas can be checked using the result of a complete contraction, which should give (6.9).

As a consequence of these formulas we have:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}.$$

$$e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A.$$

where A is the determinant formed from the quantities A_{ik}.

‡ The fact that the components of the four-tensor e^{iklm} are unchanged under rotations of the four-dimensional coordinate system, and that the components of the three-tensor $e_{\alpha\beta\gamma}$ are unchanged by rotations of the space axes are special cases of a general rule: any completely antisymmetric tensor of rank equal to the number of dimensions of the space in which it is defined is invariant under rotations of the coordinate system in the space.

Антисиметричний тензор 2-го рангу A^{ik} має дуальний псевдотензор 2-го рангу A^{*ik}, який визначається, як

$$A^{*ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}A_{lm}. \tag{1.109}$$

Добуток $A^{ik}A^{*}_{ik}$ – псевдоскаляр. Антисиметричний псевдотензор 3-го рангу $\varepsilon^{iklm}A_m$ є дуальним вектору A^i.

4-градієнт скаляра φ є 4-вектор, визначений так

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right). \tag{1.110}$$

Похідні в (1.110) треба розглядати, як коваріантні компоненти 4-вектору, оскільки диференціал від скаляра є скаляром:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i$ – це скалярний добуток двох векторів $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ та dx^i.

Взагалі оператори диференціювання по координатах x^i, тобто, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ повинні розглядатися, як коваріантні компоненти операторного 4-вектору.

Диференціювання по коваріантним компонентам 4-радіус-вектору дасть контрваріантні компоненти

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\nabla\varphi\right). \tag{1.111}$$

Квадрат градієнту маємо записувати так

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Використовуються також скорочені позначення

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right); \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right). \tag{1.112}$$

Дивергенція 4-вектору

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A}. \tag{1.113}$$

Оператор Д’аламбера (4-оператор Лапласа) будуємо так

$$\square = \partial^i \partial_i = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (1.114)$$

2. РЕЛЯТИВІСЬСЬКА КІНЕМАТИКА

2.1. Чотиривимірна швидкість та чотиривимірне прискорення

Тривимірні швидкість $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ та прискорення $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ складним чином перетворюються при перетвореннях Лоренца, бо не є компонентами 4-векторів, оскільки при перетвореннях Лоренца змінюються не тільки координати, а й час $dt' \neq dt$. Визначимо швидкість та прискорення так, щоб вони були компонентами 4-векторів. Згадаємо про інваріант (релятивістський скаляр) – інтервал між подіями

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right]\right\}.$$

Для двох подій – послідовних нескінченно близьких положень частинки у просторі інтервал буде часоподібним

$$ds^2 = c^2dt^2\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} = c^2dt^2\left\{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right\} \geq 0,$$

бо $|\vec{\upsilon}| \leq c$.

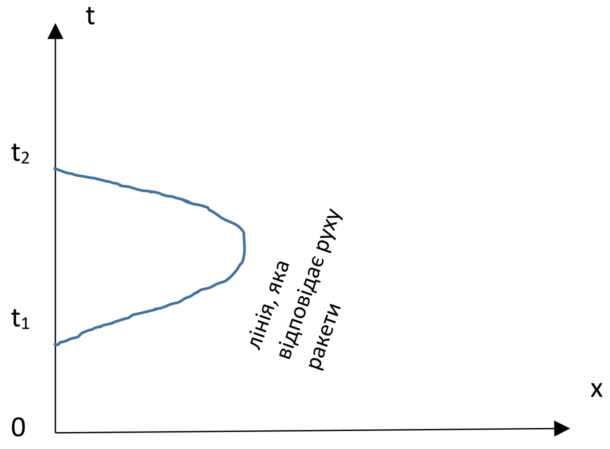
Нескінченно малий інтервал для руху частинки

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad (2.1)$$

є релятивістським інваріантом, який пов’язаний із власним часом частинки. Цей час відповідає власній системі відліку частинки, в якій вона знаходиться у стані спокою (система супроводжує частинку зі швидкістю руху частинки). Така система відліку є інеціальною в будь-який певний момент часу. У власній системі відліку швидкість частинки $\vec{\upsilon}' = 0$. Інтервал (2.1) визначає власний час об’єкта

$$ds = cdt' = cdt\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \;-$$

час, який вимірюється годинником, який рухається разом з об'єктом. Власний час рухомого об'єкта є релятивістським інваріантом. На рис. проілюстровано твердження, що у псевдоевклідовому 4-просторі крива лінія відповідає «відстані» меншій ніж пряма.



Власний час є інваріантом

$$\Delta t' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t.$$

Скористаємось інтервалом (2.1) для визначення 4-швидкості та 4-прискорення.

4-вектор 4-швидкості

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{2.2}$$

$x^i = (ct, \vec{r})$ – 4-радіус-вектор, ds – 4-скаляр, тому ми впевнені, що u^i – 4-вектор.

Напишемо 4-швидкість через тривимірні величини

$$u^i = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}(ct,\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(t,\frac{\vec{r}}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(1,\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\right);$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\dot{\vec{r}}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(1,\frac{\vec{\upsilon}}{c}\right);$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

4-швидкість є безрозмірною, бо для її визначення скористались не власним часом, а інтервалом.

Чотири компоненти 4-швидкості не є незалежними. Вони пов’язані однією додатковою умовою:

$$u^i = \gamma\left(1,\frac{\vec{\upsilon}}{c}\right); \quad u_i = \gamma\left(1,-\frac{\vec{\upsilon}}{c}\right).$$

$$u^i u_i = \gamma^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = 1.$$

$$u^i u_i = 1. \tag{2.3}$$

4-швидкість є часоподібним вектором з додатною «довжиною». Можна перевірити (2.3) безпосередньо:

$$dx^i dx_i = ds^2; \quad \frac{dx^i dx_i}{(ds)^2} = \frac{dx^i}{ds}\frac{dx_i}{ds} = u^i u_i = 1.$$

4-швидкість направлена по дотичній до світової лінії частинки в 4-просторі.

Закон перетворення 4-швидкості при частинних перетвореннях Лоренца (1.51)

$$u^0 = \frac{u^{0\prime} + \frac{V}{c}u^{1\prime}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad u^1 = \frac{\frac{V}{c}u^{0\prime} + u^{1\prime}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad u^2 = u^{2\prime}; \quad u^3 = u^{3\prime}. \tag{2.4}$$

Перепишемо (2.4) у тривимірних позначеннях:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right); \quad u^{i\prime} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}'}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}} \right).$$

Почнемо із часової компоненти:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

або

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}. \tag{2.5}$$

З інваріантності інтервалу

$$ds = cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = cdt'\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}; \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}};$$

бачимо, що (2.5) визначає відношення відрізків часу у двох ІСВ

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) використаємо для отримання закону перетворення просторових компонент 4-швидкості.

$$\frac{\upsilon_x}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\frac{V}{c}+\frac{\upsilon'_x}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}};\quad \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\upsilon'_x+V}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}};$$

$$\upsilon_x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\left(\upsilon'_x+V\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}=\left(\upsilon'_x+V\right)\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}}}_{\frac{1}{1+\frac{\upsilon'_x V}{c^2}}}$$

Отримали формулу

$$\upsilon_x=\frac{\left(\upsilon'_x+V\right)}{1+\frac{\upsilon'_x V}{c^2}}. \tag{2.7}$$

Аналогічно знаходимо закони перетворення для *y* та *z* компонент тривимірної швидкості

$$\frac{\upsilon_y}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{\upsilon'_y}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}};\quad \upsilon_y=\upsilon'_y\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}}}_{=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}}$$

Для z-проекції швидкості викладки повністю аналогічні. Отримуємо

$$\upsilon_y=\upsilon'_y\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}};\quad \upsilon_z=\upsilon'_z\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}} \tag{2.8}$$

Формули (2.7), (2.8), як і повинно бути, співпадають з отриманими раніше формулами закону додавання швидкостей (1.26).

4-прискорення визначається так

$$w^i=\frac{du^i}{ds}=\frac{d^2x^i}{ds^2}. \tag{2.9}$$

Покажемо, що 4-швидкість та 4-прискорення є ортогональними векторами:

$$u^i u_i = u_i u^i = 1; \quad \frac{d}{ds} u^i u_i = 0;$$

$$\frac{d}{ds} u^i u_i = \frac{d}{ds}(u^i) u_i + u^i \frac{d}{ds} u_i = w^i u_i + u^i w_i = w^i u_i + w_i u^i = 2 w^i u_i = 0;$$

$$\frac{d}{ds} u_i u^i = \frac{d}{ds}(u_i) u^i + u_i \frac{d}{ds} u^i = w_i u^i + u_i w^i = w_i u^i + w^i u_i = 2 w_i u^i = 0;$$

$$w^i u_i = 0. \qquad (2.10)$$

Нагадаємо, що для будь якої пари німих індексів можна змінювати верхні та нижні індекси $A^i B_i = A_i B^i$. Скалярний добуток $A^i B_i = B_i A^i$.

Напишемо 4-прискорення через тривимірні величини:

$$w^i = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right), \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \left(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \frac{\dot{\vec{\upsilon}}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^3\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right); \qquad \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

$$w^i = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \left(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \frac{\dot{\vec{\upsilon}}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^3\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right).$$

$$w^i = \left(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c^3\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\dot{\vec{\upsilon}}}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} + \frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^4\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2} \right) = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\gamma^2\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c}, \dot{\vec{\upsilon}} + \gamma^2\frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^2}\right); \tag{2.11}$$

$$w_i = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\gamma^2\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c}, -\dot{\vec{\upsilon}} - \gamma^2\frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^2}\right).$$

В релятивістській механіці тривимірний вектор прискорення не є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Вектор тривимірного прискорення є різним в різних ІСВ $\dot{\vec{\upsilon}} \neq \dot{\vec{\upsilon}}'$.

Квадрат 4-прискорення – релятивістський інваріант. Скористаємось цим, щоб визначити «довжину» вектору 4-прискорення

$$w^i w_i = \left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\left(\gamma^2\frac{\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}}{c}\right)^2 - \left(\dot{\vec{\upsilon}} + \gamma^2\frac{(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^2}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\frac{\gamma^4}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2 - \dot{\vec{\upsilon}}^2 - 2\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2 - \frac{\gamma^4}{c^4}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2\upsilon^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\frac{\gamma^4}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2 \underbrace{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}} - \dot{\vec{\upsilon}}^2 - 2\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2 - \dot{\vec{\upsilon}}^2 - 2\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2\right] = -\left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\dot{\vec{\upsilon}}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2\right];$$

$$w^i w_i = -\left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \left[\dot{\vec{\upsilon}}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)^2\right] < 0. \tag{2.12}$$

Довели, що 4-прискорення є просторовоподібним вектором.

Найпростіший вигляд квадрат 4-прискорення має у власній системі відліку частинки, що рухається, в якій $\vec{\upsilon}' = 0, \gamma' = 1$:

$$w^i w_i = -\frac{a^2}{c^4}; \quad \vec{\upsilon}' = 0; \quad \vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}}'.$$

Згідно з (2.12) маємо

$$\left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2\left[\dot{\vec{v}}^2+\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)^2\right]=\frac{a^2}{c^4};$$

$$\gamma^4\left[\dot{\vec{v}}^2+\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)^2\right]=a^2. \tag{2.13}$$

На наступній лекції скористаємось формулою (2.13), щоб дослідити релятивістський рівноприскорений рух у найпростішому випадку $\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}}\,||\,Ox; \quad \vec{r}(0)=0, \vec{v}(0)=0.$